Large-Scale Structure of the Universe and Cosmological Perturbation Theory(1)

望月　悠紀

2010/4/26
2010/5/3

概 要

ここでは、宇宙の大規模構造を理解するために非線形の摂動理論の形式と運用法を概説する．具体的には以下のとおりである．

1. 重力不安定性における力学を線形から非線形まで扱う．
   - オイラーとラグランジュの摂動理論、非線形近似、数値計算のテクニックを述べる．
2. 統計的手法を紹介する．
   - 実空間、波数空間における相関関数
   - 確率分布関数
   - cumulants and generating function??
3. 摂動理論を実際に用いて、初期条件から統計的な物理量の数値計算を行う．この初期条件には非ガウス分布になるものも含まれる．
4. 観測に対して適用する．
   (a) 銀河カタログにおいてよく使われる物理量と誤差について
   (b) 銀河分布と物質分布の間におけるバイアスという概念

1　導入と諸注意

2　重力不安定性における力学

銀河観測でわかった大規模構造の要因：膨張宇宙における Cold Dark Matter の重力相互作用のため、最初の小さなゆらぎが増幅されたため.
←しかし、理論的にはまだまだ未解明のことも多い.
→摂動理論を用いるが、どのように用いられているかを議論していく．観測とも比較し、摂動理論がどの程度正しいのか検証する.

Cold Dark Matter 粒子の候補：

- 銀河の典型的な質量よりもはるかに軽い.
- 数密度 $> 10^{50}$個/Mpc →とても多い．→ 2 体緩和などの離散的な効果は無視される.
- 無衝突のダークマターは位相空間における分布関数が Vlasov 方程式にしたがう.

2.1　Vlasov 方程式

ここでは、Vlasov 方程式がどんな形に書けるかをみる．$f(\vec{x},\vec{p},\tau)$ はある場所 $\vec{x}$ である運動量 $\vec{p}$ をもつ粒子の密度を表す．微分の連鎖則より、

$$\begin{aligned}\frac{df(\vec{x},\vec{p},\tau)}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial\tau} + \frac{d\vec{x}}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial\vec{x}} + \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial\tau} + (\vec{v}\cdot\nabla)f + \frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\end{aligned}$$

と f の τ による全微分は f の $\tau, \vec{x}, \vec{p}$ それぞれの偏微分の形に分解できる．τ は"Conformal time"とよばれる時間であり、あとで定義される．以下、$df/d\tau$ が宇宙論では具体的にどのようにかけるか考える.

質量 m の粒子から重力を受ける粒子の運動方程式は、

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = Gm\sum_i \frac{\vec{r_i}-\vec{r}}{|\vec{r_i}-\vec{r}|} \tag{1}$$

となり、重力源である粒子がたくさんある場合、ポテンシャルの値はなめらかになるので、

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial\vec{r}} \tag{2}$$

というように表される．ただし、重力ポテンシャル ϕ は、質量密度 $\rho(\vec{r'})$ を用いて、

$$\phi(\vec{r}) = G \iiint d^3\vec{r} \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r'} - \vec{r}|} \tag{3}$$

と積分の形でかける．

ここで、新たに変数を導入する．

$$\vec{r} = a(\tau)\vec{x}, \qquad dt = a(\tau)d\tau \qquad \mathcal{H}(\tau) = Ha$$

$\vec{x}, \tau, \mathcal{H}$ はそれぞれ、共動座標、Conformal time、Conformal なハッブルパラメータであり、a はスケール因子である．

このように定義された変数の下で、どのような方程式が成り立つか考える．

１．Friedmann 方程式から導かれる方程式

Friedmann 方程式は次のように書かれる．

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

これを変形すると、

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{H}(\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\Omega_m(\tau)}{2}\mathcal{H}^2(\tau) + \frac{\Lambda}{3}a^2(\tau)}$$

となる．ただし、物質の密度パラメータは、$\Omega_m \equiv \rho_m/\rho_{cr} = 8\pi G\rho_m/3H^2$ で定義される．

２.（宇宙論的な）ポアソン方程式

ゆらぎ $\delta(\vec{x}, \tau)$ の定義：

$$\delta(\vec{x}, \tau) = \frac{\rho(\vec{x}, \tau) - \bar{\rho}(\tau)}{\bar{\rho}(\tau)} \tag{4}$$

特異速度場（宇宙膨張による後退速度ではなく、天体固有の速度）$\vec{u}$：

$$\vec{v} = \mathcal{H}\vec{x} + \vec{u}(\vec{x}, \tau) \tag{5}$$

膨張宇宙における重力ポテンシャル Φ：

$$\Phi(\vec{x}, \tau) = \phi(\vec{x}, \tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau}x^2 \tag{6}$$

これらよりポアソン方程式

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

は、次のように書き直せる．

$$\boxed{\nabla^2\Phi(\vec{x},\tau)=\frac{3}{2}\Omega_m(\tau)\mathcal{H}^2(\tau)\delta(\vec{x},\tau)}$$

３．運動量の時間微分
式 (1) は、

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{d\tau}=-am\nabla\Phi(\vec{x})}$$

となる．ただし、

$$\vec{p}=am\vec{u} \tag{7}$$

である．

結局、密度の分布関数 $f(\tau,\vec{x},\vec{p})$ の全微分 $df/d\tau$ は、

$$\begin{aligned}\frac{df(\tau,\vec{x},\vec{p})}{d\tau} &= \frac{\partial f}{\partial\tau}+(\vec{v}\cdot\nabla)f+\frac{d\vec{p}}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial\vec{p}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial\tau}+\frac{\vec{p}}{ma}\cdot\vec{\nabla}f-am\vec{\nabla}\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}\end{aligned} \tag{8}$$

となる．ここで、粒子の分布関数 $f(\tau,\vec{x},\vec{p})$ は時間に対して不変なので、$df/d\tau$ は零である．したがって、

$$\frac{df(\tau,\vec{x},\vec{p})}{d\tau}=\frac{\partial f}{\partial\tau}+\frac{\vec{p}}{ma}\cdot\vec{\nabla}f-am\vec{\nabla}\Phi\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{p}}=0 \tag{9}$$

である．これは **Collisioness な Boltzmann 方程式**、または **Vlasov 方程式**とよばれる．

2.2　オイラー的な見方による力学

Vlasov 方程式から流体の基礎方程式を導く．
→粒子の数密度を表す関数 f のモーメントを考える：

- f の０次のモーメント：

$$\iiint d^3\vec{p}f(\vec{x},\vec{p},\tau)\equiv\rho(\vec{x},\tau) \tag{10}$$

- f の１次のモーメント：

$$\iiint d^3\vec{p}\frac{\vec{p}}{am}f(\vec{x},\vec{p},\tau)\equiv\rho(\vec{x},\tau)\vec{u}(\vec{x},\tau) \tag{11}$$

- f の２次のモーメント：

$$\iiint d^3\vec{p}\frac{p_i p_j}{a^2 m^2} f(\vec{x},\vec{p},\tau) \equiv \rho(\vec{x},\tau)u_i(\vec{x},\tau)u_j(\vec{x},\tau) + \sigma_{ij}(\vec{x},\tau) \tag{12}$$

導いた Vlasov 方程式のモーメントをとって全運動量空間で積分してやることにより、次式が得られる：

$$\frac{\partial\delta(\vec{x},\tau)}{\partial\tau} + \nabla\cdot[1+\delta(\vec{x},\tau)\vec{u}(\vec{x},\tau)] = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial\vec{u}(\vec{x},\tau)}{\partial\tau} + \mathcal{H}(\tau)\vec{u}(\vec{x},\tau) + (\vec{u}(\vec{x},\tau)\cdot\nabla)\vec{u}(\vec{x},\tau) = -\nabla\Phi(\vec{x},\tau) - \frac{1}{\rho}\nabla_j(\sigma_{ij}) \tag{14}$$

式 (13)、(14) はそれぞれ連続の式、オイラーの運動方程式と呼ばれる．

2.3 オイラー的な線形摂動理論

large scale では宇宙はなめらかだと考えることができ、得られた方程式の微小量 $(\delta,\vec{u})$ の２次の項を無視する．すなわち、方程式を線形化する．

$\theta(\tau,\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{u}(\tau,\vec{x})$ と θ を定義すると、

$$\frac{\partial\delta(\vec{x},\tau)}{\partial\tau} + \theta(\vec{x},\tau) = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial\vec{u}(\vec{x},\tau)}{\partial\tau} + \mathcal{H}(\tau)\vec{u}(\vec{x},\tau) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x},\tau) \tag{16}$$

と、線形な連続の式とオイラーの運動方程式がそれぞれ得られる．式 (16) の発散をとると

$$\frac{\partial\theta(\vec{x},\tau)}{\partial\tau} + \mathcal{H}(\tau)\theta(\vec{x},\tau) + \frac{3}{2}\Omega_m(\tau)\mathcal{H}^2(\tau)\delta(\vec{x},\tau) = 0 \tag{17}$$

を得る．