台形則による数値積分

望月　悠紀

2010/10/19

1　台形則の基本形

積分

$$S = \int_{x_0}^{x_N} f(x)dx \tag{1}$$

を台形則を用いて、数値計算することを考える．図に示してあるように、曲線 $f(x)$ を一次関数で近似している．すなわち、積分の被積分関数の近似に一次関数を用いている．

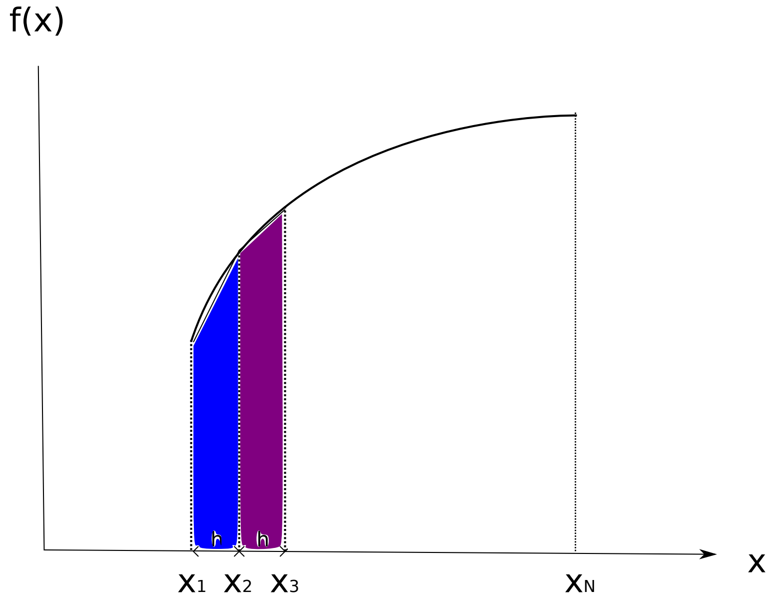

図 1: 関数 $f(x)$ を一次関数で近似し、$f(x)$ を積分する様子.

h を刻み幅、N を分割数とすると、台形則による数値積分 S_t は次のように書ける：

$$\begin{aligned} S_t &= h\left(\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \cdots f(x_{N-1}) + \frac{1}{2}f(x_N)\right) && (2)\\ &= \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_N)) + h(f(x_1) + f(x_2) + \cdots f(x_{N-1})) && (3)\end{aligned}$$

2　誤差

　ここでは、台形則による積分が真の値とどの程度誤差を持つのか考える．
まず、微小台形の近似誤差 ϵ を考える．

$$\epsilon(x_i,h) = \frac{h}{2}(f(x_i+h)+f(x_i)) - \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \tag{4}$$

この計算をするために、以下のように関数 $f(x_i)$ を Taylor 展開する：

$$f(x_i+h) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + O(h^{n+1}) \tag{5}$$

さらにこの両辺を $\displaystyle\int_0^h dh'$ で積分する．

$$\begin{aligned}\int_0^h f(x_i+h')dh' &= \int_0^h [f(x_i) + h'f'(x_i) + \frac{1}{2!}h'^2 f''(x_i) + \cdots + \frac{1}{n!}h'^n f^{(n)}(x_i)]dh' + O(h^{n+2}) \\ &= hf(x_i) + \frac{h^2}{2}f'(x_i) + \frac{h^3}{3\cdot 2!}f''(x_i) + \cdots \frac{h^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n)}(x_i) + O(h^{n+2})\end{aligned} \tag{6}$$

左辺に対し、$x_i + h' \equiv x$ と変数変換すると、

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = hf(x_i) + \frac{h^2}{2}f'(x_i) + \frac{h^3}{3\cdot 2!}f''(x_i) + \cdots \frac{h^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n)}(x_i) + O(h^{n+2}) \tag{7}$$

となる．よって式 (4) は、

$$\epsilon(x_i,h) = \frac{h}{2}f(x_i+h) - \frac{h}{2}f(x_i) - \frac{h^2}{2}f'(x_i) - \frac{h^3}{3\cdot 2!}f''(x_i) - \cdots - \frac{h^{n+1}}{(n+1)n!}f^{(n)}(x_i) - O(h^{n+2}) \tag{8}$$

となる．さらに右辺第 1 項を式 (5) で Taylor 展開し、整理すると、

$$\epsilon(x_i,h) = \frac{h^3}{12}f''(x_i) + O(h^4) \tag{9}$$

を得る．これにより全区間足しあげたときの誤差 E は、

$$\begin{aligned} \frac{Nh^3}{12}f''_{\text{min}} \leqq \quad & E \quad \leqq \frac{Nh^3}{12}f''_{\text{max}} && (10)\\ \text{or} \qquad \frac{x_N - x_1}{12}h^2 f''_{min} \leqq \quad & E \quad \leqq \frac{x_N - x_1}{12}h^2 f''_{max} && (11)\\ \text{or} \qquad \frac{(x_N - x_1)^3}{12N^2} f''_{min} \leqq \quad & E \quad \leqq \frac{(x_N - x_1)^3}{12N^2} f''_{max} && (12)\end{aligned}$$

であることがわかる．ただし、２つ目、３つ目の式には、$h = (x_N - x_1)/N$ を用いた．上でみた式 (9)、(11) より、微小面積の数値計算は、h^2 の精度で、全体の面積の数値計算は h の精度まで正確に計算できるという結論を得る．

蛇足

分割数 $N=1$ の台形則で数値積分するとどのくらいの誤差がでるか.

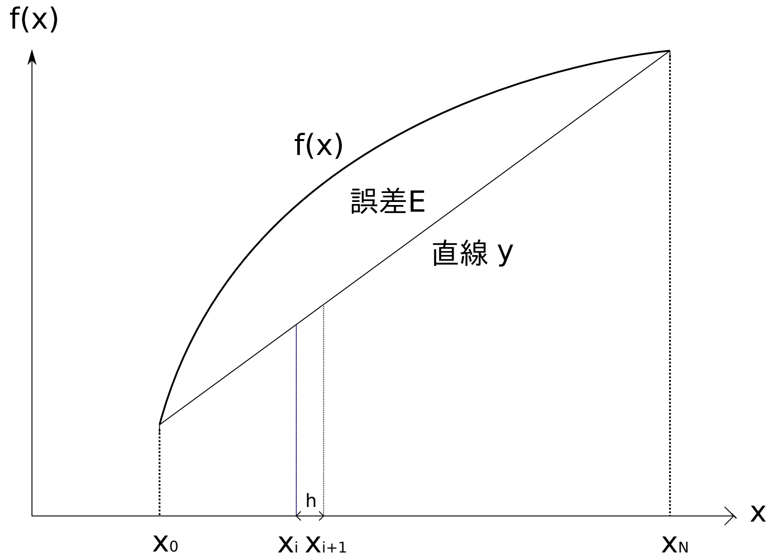

図 2: 分割数 $N=1$ の台形

先に示した誤差の求め方と同様、まず、図に示されるように、端点 $(x_0, f(x_0))$, $(x_N, f(x_N))$ を直線で結び、さらに、その直線を N 分割した小台形の面積と面積の真の値の誤差 $\epsilon(x_i, h)$ は、次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{h}{2}(y(x_i)+y(x_{i+1})) - \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\left(f(x_0)+\frac{f(x_N)-f(x_0)}{x_N-x_0}(x_i-x_0)+f(x_0)+\frac{f(x_N)-f(x_0)}{x_N-x_0}(x_i+h-x_0)\right) - \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\left(2f(x_0)+\frac{f(x_N)-f(x_0)}{x_N-x_0}(2i+1)h\right) - \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \\
&= hf(x_0)+\frac{2i+1}{2}\frac{h}{N}(f(x_N)-f(x_0)) - \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \\
&= \frac{2i+1}{2}\frac{h}{N}(f(x_N)-f(x_0)) + O(h^2)
\end{aligned} \tag{13}
$$

ただし、途中、$x_i = x_0 + ih,\ h = (x_N - x_0)/N$ を用いた. これより、全区間足しあげたときの誤差 E は、

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=0}^{N} \epsilon \\
&= \frac{N(N+2)}{2}\frac{h}{N}(f(x_N)-f(x_0)) \\
&= \frac{1}{2}(x_N-x_0)(f(x_N)-f(x_0)) + O(h)
\end{aligned} \tag{14}
$$

となり、精度がまったくでないことになる.

3　収束性

積分の数値計算において台形則を用いると、式 (12) より、分割数 N を増やせば、誤差が小さくなっていくことが分かる．しかし、実際の研究現場においてはコンピュータの性能の問題、計算時間の問題などにより、N を大きくすることに限界がある．

それでは、分割数 N はどこまで増やせばよいのであろうか．実際の数値積分においては、計算結果が真の値に収束しているかは分からないから、そのときの分割数 N の値が妥当なのかどうか判断できない．

分割数 N の値が妥当なのかどうかは、次の方法でチェックされる．

まず、ある適当な N の値で数値積分してみる．このときの計算結果を S_N とおく．次に、分割数を $2N$ にしてみて、数値積分する．このときの計算結果を S_{2N} とする．そして、

$$\frac{|S_{2N} - S_N|}{S_N} < \delta \tag{15}$$

となったところで、積分値は真の値に収束しているとし、計算を終了する．もし、上の式を満たさなければ、さらに分割数 $4N$ で数値積分をおこない、上の式を満たすまで分割数を増やして計算を繰り返していく．ちなみに δ の値は、たとえば 10^{-6} である．なぜ 10^{-6} なのかというと、あまりに多く分割数をとったとしても、丸め誤差が蓄積してくるのでこれより小さい δ になることはないのである．(numerical recipe in C p128)