

# 重力レンズ

東北大学理学研究科天文学専攻

望月悠紀

## 更新情報

2009年8月第1版 1.2.1まで記述

2010年3月第3版 加筆訂正および1.2.3まで記述

2010年4月第4版 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6を記述

2010年4月17日第5版 図に説明を追加．1.2.7を記述

2010年4月20日第6版 1.2.8を記述

# 1 重力レンズ

## 1.1 概要

そもそも重力レンズ効果は、光が、その経路上に分布する重力ポテンシャルによって曲がり、銀河などの天体の位置が変化するように見えたり、歪んで見えたりする現象である。この現象は、古典力学や一般相対論から理論的に予測することが可能であるが、観測機器の精度の都合上、実際に観測されることは非常に難しいとされていた。初めて観測されたのは1979年になってからのことで、それは一般相対論を打ち立てたアインシュタイン生誕100年の年であった。現在は、観測性能の向上によって多くの重力レンズ系が発見され、観測的宇宙論の重要な分野になっている。

強い重力レンズ現象であれば、もともと楕円形をしていた銀河がアーク状に大きく引き延ばされて見えたり、一つの銀河が複数個に見えたりする、とてもダイナミックな変化がある。一方、弱い重力レンズの場合は、銀河の形こそ大きな変化はないものの、多数の銀河を調べてみれば統計的にわずかな歪みが見えたり、銀河の長軸が、ある特徴的な方向を向いていたりする。宇宙空間にはいたるところに重力ポテンシャルが分布しているため、我々に届く天体の光はすべて重力レンズ効果を受けていると言ってもいいだろう。

それでは、重力レンズ効果から一体どのようなことが分かるのであろうか。まず第一に、銀河の質量を求めることが可能である。他の方法でももとめられるが、多くの仮定を必要としているので、系統誤差が大きくなる。しかし、重力レンズから求める場合には何の仮定も必要もしないので系統誤差が小さくなる。よって、重力レンズは銀河質量を求めるときの強力な武器になる。第二に、宇宙論パラメータの制限にも力を発揮する。他の方法、例えば、Ia型超新星やCMB温度揺らぎの観測などからも求められるが、これらと組み合わせることで、宇宙論パラメータに強い制限をかけることができるのである。他にもさまざまな用途に重力レンズは用いられており、宇宙論を研究する際には必要不可欠なものになってきている。

この第1章では重力レンズの基礎について勉強する。第2章以降は筆者の気分による。

## 1.2 重力レンズの基本原理

### 1.2.1 光の曲がりの角度の計算

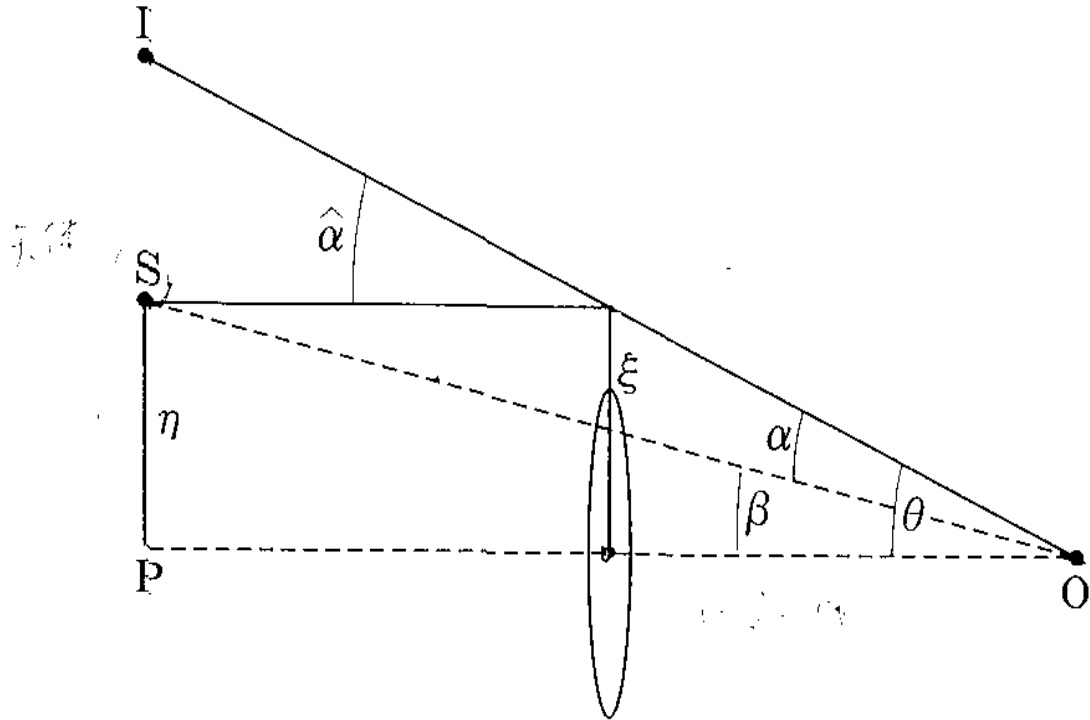


図 1: 重力レンズの配置．観測者  $O$  が  $S$  の位置にある光源からの光を見るときに、観測者から距離  $D_d$  の位置にあるレンズ天体の重力のために、光線の経路が角度  $\alpha$  だけ曲がっている様子を示す．

上図は、光源  $S$  の光が、途中のレンズ天体による重力ポテンシャルによって曲げられ、観測者に届く図を表している．光が曲げられた結果、本来光源は  $S$  の位置にあるはずが、観測者にとっては  $I$  の位置にあるように見える．図の斜めの破線はレンズ天体がなかったとしたときの光の進む軌道である．また、図では光がある一点で急に折れ曲がっているように見えるが、これは、レンズ天体の厚みが、観測者と光源の距離より十分小さいと仮定したことによる．角度  $\hat{\alpha}$ ,  $\beta$  はそれぞれ、曲がりの角度、光源の位置（の角度）などと呼ばれる． $\alpha$  も曲がりの角度であるが、これは特に規格化された曲がりの角度、と呼ぶことが多い．ニュートンポテンシャル  $\Phi$  によって曲げられる光の角度  $\hat{\alpha}$  は次のように書くことができる．

$$\hat{\alpha} = 2 \int dz \nabla_{\perp} \Phi = - \int dz \nabla_{\perp} n \quad (1)$$

ここで、 $z$  軸方向に光が直進しているものとし、それに垂直な方向に光が曲がるものとする． $\nabla_{\perp}$  は、光の進行方向に垂直な方向の微分演算子であり、 $\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$

とする．また、 $n$  は光の屈折率であり、 $n = c/v$  で定義される．まずはこの式を証明することから始める．

角度部分を無視した間隔  $ds^2$  は、

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2)$$

とかける．また、間隔  $ds^2$  の定義は、 $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  とすれば、

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \quad (3)$$

なので、計量テンソル  $g_{\mu\nu}$  は、

$$\begin{aligned} g_{00} &= -(1 + 2\Phi) \\ g_{11} &= g_{22} = g_{33} = 1 - 2\Phi \end{aligned}$$

となる．

一方、測地線方程式は、

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k^\alpha k^\beta = 0 \quad (4)$$

である． $\vec{k}$  は光の経路に沿った 4 元運動量であり、光では  $\vec{k} \cdot \vec{k} = 0$  である．また、 $\lambda$  はアフィンパラメータである．この測地線方程式を解くことを考える．いま、光は  $z$  方向に進むとすれば、光の 4 元運動量  $\vec{k}$  は、

$$\vec{k} = (k_0, 0, 0, k_z) \quad (5)$$

と書ける．これに  $k^2 = 0$  の条件を用いると、

$$\begin{aligned} k^2 &= g_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \\ &= g_{00}(k^0)^2 + g_{33}(k_z)^2 + g_{03}k^0 k^3 + g_{30}k^3 k^0 \\ &= -(1 + 2\Phi)(k^0)^2 + (1 - 2\Phi)(k^3)^2 = 0 \\ \left(\frac{k_0}{k_z}\right)^2 &= \frac{1 + 2\Phi}{1 - 2\Phi} \end{aligned}$$

ポテンシャル  $\Phi$  は十分に小さいと仮定すると、

$$\frac{k_0}{k_z} \approx 1 + 2\Phi \quad (6)$$

と近似できる．また、 $\Gamma$  は Christoffel Symbol

$$\Gamma_{\rho\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (7)$$

である．

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{1\lambda} \left( \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{\lambda 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) \\
&= \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1-2\Phi} \times 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
&= (1-2\Phi)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
&\approx (1+2\Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\
&\approx -\frac{\partial \Phi}{\partial x}
\end{aligned}$$

途中、計量テンソルが、

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \mathbf{I} \quad (8)$$

を満たすことと、ニュートンポテンシャル  $\Phi$  が 1 よりも十分小さいことを用いた．同様に 1, 2, 3 成分を計算すると、

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (9)$$

であることが分かる．同様に、 $\Gamma_{03}^i$ ,  $\Gamma_{33}^i$  を計算すると、

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (10)$$

$$\Gamma_{03}^i = 0 \quad (11)$$

$$\Gamma_{33}^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (12)$$

と求まる．以上を用いれば測地線方程式を解くことができる．ただし、光の 4 元運動量  $\vec{k}$  は  $z$  に垂直な  $x$  軸方向にわずかに曲がるとしたら、次のように書きなおせることに注意する．

$$\vec{k} = (k^0, k^1, k^2, k^3) = (1 + 2\Phi, \epsilon, 0, 1) \quad (13)$$

したがって測地線方程式は、

$$\begin{aligned}
\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma_{00}^i (k^0)^2 + \Gamma_{33}^i (k^3)^2 + \Gamma_{03}^i k^0 k^3 + \Gamma_{30}^i k^3 k^0 &= 0 \\
\frac{dk^i}{d\lambda} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} &= 0 \\
\frac{dk^i}{d\lambda} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} &= 0
\end{aligned} \quad (14)$$

となる．途中、 $(\partial\Phi/\partial x^i)(1+2\Phi)^2 \approx \partial\Phi/\partial x^i$  で近似した．また、 $x^3 = z = \lambda$  であることを用いて、

$$\begin{aligned}\frac{dk^1}{dz} &= 2\frac{\partial\Phi}{\partial x} \\ k^1 &= 2\int\frac{\partial\Phi}{\partial x}dz\end{aligned}\quad (15)$$

となる．光が曲がる角度  $\hat{\alpha}$  とすると、

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \left(\frac{k_x}{k_z}\right) = \frac{2\int\frac{\partial\Phi}{\partial x}dz}{1} \\ &= 2\int\nabla_x\Phi dz\end{aligned}\quad (16)$$

また、メトリック

$$ds^2 = -(1+2\phi)dt^2 + (1-2\phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)\quad (17)$$

で  $dx = dy = 0$  とすると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \frac{1+2\Phi}{1-2\Phi} = \frac{1-(2\phi)^2}{(1-2\phi)^2} \approx \frac{1}{(1-2\phi)^2} \\ \frac{dz}{dt} &= v \approx \frac{c}{1-2\phi} \quad (< c)\end{aligned}\quad (18)$$

となる．ここで、光速  $c = 1$  という単位系を用いている．これと、 $v = c/n$  より、

$$n = 1 - 2\Phi \quad \Phi = \frac{1-n}{2}\quad (19)$$

となるから、

$$\hat{\alpha} = 2\int\nabla_x\Phi dz = -\int\nabla_x n dz\quad (20)$$

となる．光速  $c$  を明記すれば、

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2}\int\nabla_x\Phi dz = -\frac{1}{c^2}\int\nabla_x n dz.\quad (21)$$

ここまでは、光の進行方向が  $z$  軸の向きで、重力ポテンシャルによって  $x$  軸方向にのみ曲げられるとしてきたが、より一般には、光は  $z$  軸に対して垂直な方向に曲がるので、 $\nabla_{\perp}$  を  $z$  軸に対して垂直な方向の微分演算子とすると、

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2}\int\nabla_{\perp}\Phi dz = -\frac{1}{c^2}\int\nabla_{\perp} n dz.\quad (22)$$

となる．これで式 (1) が示された．さて、レンズ天体はきわめて薄いものと考え、

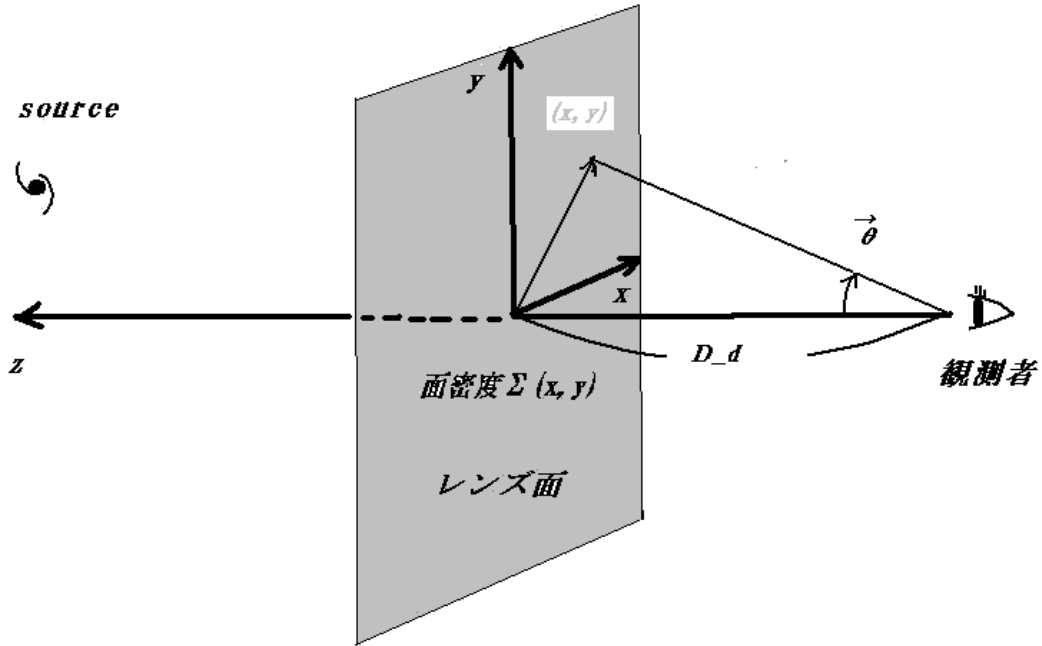


図 2: レンズ面に投影された密度である面密度と座標 .

光はレンズ面のところだけで曲がるものとする . このとき、レンズ天体の質量密度をレンズ面に射影した面密度  $\Sigma(\vec{x})$  で曲がりの角度  $\hat{\alpha}$  を書くと便利である . 重力ポテンシャル  $\Phi(\vec{r})$  は、

$$\Phi(\vec{r}) = -G \iiint d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (23)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \iiint dx' dy' dz' \frac{\rho(\vec{r}')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= - \iiint dx' dy' dz' \frac{\rho(\vec{r}') (x-x')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (24)$$

よって、曲がりの角度  $\hat{\alpha}$  は、

$$\hat{\alpha} = \frac{2G}{c^2} \int dz \iiint dx' dy' dz' \rho(\vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}') (x-x', y-y')}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} \quad (25)$$

ここで、 $z = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \tan \theta$  と置換すれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (26)$$

となるから、

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{4G}{c^2} \iint dx' dy' \int dz' \rho(\vec{r}') \frac{(x-x', y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ &= \frac{4G}{c^2} \iint d^2 \vec{x}' \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \Sigma(\vec{x}')\end{aligned}\quad (27)$$

ただし、通常の体積密度  $\rho(x, y, z)$  と面密度  $\Sigma(x, y)$  には次の関係があることを用いた。

$$\Sigma(x, y) = \int dz \rho(x, y, z) \quad (28)$$

規格化された曲がりの角度  $\alpha$  をコンバージェンス  $\kappa$  と、角度座標  $\theta$  で表現する方法もある。

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{4G}{c^2} \iint d^2 \vec{x}' \Sigma(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \\ \frac{D_s}{D_{ds}} \alpha &= \frac{4G}{c^2} \iint d^2 \vec{x}' \Sigma(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \\ \alpha &= \frac{4G}{c^2} \frac{D_{ds}}{D_s} \iint d^2 \vec{x}' \frac{\Sigma(\vec{x}')}{\Sigma_{cr}} \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \\ &= \frac{1}{\pi D_d} \iint d^2 \vec{x}' \kappa(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}\end{aligned}$$

ここで、 $\vec{x} = D_d \vec{\theta}$  であることから、

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \iint d^2 \vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \quad (29)$$

を得る。ただし、途中で臨界面密度

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}} \sim 0.35 \left( \frac{D}{1\text{Gpc}} \right) \text{ g cm}^{-2} \quad (30)$$

を用いた。  $D$  は、  $D \equiv D_d D_{ds} / D_s$  で定義される距離の目安である。この臨界面密度は、強い重力レンズ現象を起こすか、弱い重力レンズ現象を起こすかの目安になり、よく使われる表現である。また  $\kappa$  はコンバージェンスと呼ばれる量であり、面密度と臨界面密度の比  $\Sigma / \Sigma_{cr}$  で与えられる。コンバージェンスの物理的意味は、後ほど明らかになる。

以上をまとめると、曲がりの角度は次のように書けることが分かる。

$$\hat{\alpha} = 2 \int dz \nabla_{\perp} \Phi = - \int dz \nabla_{\perp} n = \frac{1}{\pi} \iint d^2 \vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2}$$



### 1.2.2 レンズ方程式

レンズ方程式を導出する .

光源面では、 $\vec{P}\vec{I} = \vec{P}\vec{S} + \vec{S}\vec{I}$  が成り立っているから、

$$\begin{aligned} D_s \vec{\theta} &= D_s \vec{\beta} + D_{ds} \hat{\alpha} \\ \vec{\beta} &= \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \end{aligned} \quad (31)$$

が成り立つ . 式 (31) はレンズ方程式と呼ばれる . ここで、角度  $\vec{\alpha} = \hat{\alpha} D_{ds} / D_s$  で定義した . この式は単純な式に思えるが、頻繁に出てくる重要な方程式である .

この節のまとめ : \_\_\_\_\_

レンズ方程式 :

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta})$$


---

### 1.2.3 レンズポテンシャル

曲がりの角度はニュートンポテンシャルの勾配で書けることから、規格化された角度も次のようにある関数  $\psi(\theta)$  の勾配で書くことができる . この関数  $\psi(\theta)$  をレンズポテンシャルと名づけよう . レンズポテンシャルはスカラー量であるから、計算するときはこれを導入した方が簡単になる . ここで「ポテンシャル」と言っているのは、古典力学で扱った式  $\vec{F} = -\nabla\phi$  において、 $\phi$  を「ポテンシャル」と呼んだことに起因している .

$$\alpha = \nabla_{\theta} \psi(\theta) \quad (32)$$

ここで、 $\nabla_{\theta} = (\partial/\partial\theta_1, \partial/\partial\theta_2)$  であり、角度座標の勾配である . 導入したレンズポテンシャルは具体的にどのように書けるか考える . 式 (32) は、

$$\hat{\alpha} = \frac{D_s}{D_{ds}} \nabla_{\theta} \psi(\vec{\theta}) \quad (33)$$

となり、また、式 (22) と用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{2}{c^2} \int dz \nabla_{\perp} \Phi(x, y, z) &= \frac{D_s}{D_{ds}} \nabla_{\theta} \psi \\ &= \frac{D_s}{D_{ds}} D_d \nabla_{\perp} \psi(\vec{x}) \\ \int dz \nabla_{\perp}^2 \Phi(x, y, z) &= \frac{c^2}{2} \frac{D_s D_d}{D_{ds}} \nabla_{\perp}^2 \psi(\vec{x}) \end{aligned} \quad (34)$$

と書ける．ただし、2つ目の等号では、 $\nabla_\theta = D_d \nabla_\perp$  を用いた．さて、 $\Phi(x, y, z)$  はレンズ銀河の重力ポテンシャルであるのだが、 $z$  方向に対しては十分に薄いと仮定すると、

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \approx 0 \quad (35)$$

なので、

$$\int dz \nabla_\perp^2 \Phi(x, y, z) = \int dz \nabla^2 \Phi(x, y, z) = 4\pi G \int dz \rho(x, y, z) = 4\pi G \Sigma(\vec{x}) \quad (36)$$

としてよい．ただし、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  であり、また、2つ目の等号はポアソン方程式による．式 (34) と式 (36) より、

$$\begin{aligned} 4\pi G \Sigma(\vec{x}) &= \frac{c^2 D_s D_d}{2 D_{ds}} \nabla_\perp^2 \psi(\vec{x}) \\ &= \frac{c^2 D_s}{2 D_{ds} D_d} \nabla_\theta^2 \psi(\vec{\theta}) \end{aligned} \quad (37)$$

となるので、最終的に次式を得る：

$$\nabla_\theta^2 \psi(\vec{\theta}) = \frac{8\pi G D_{ds} D_d}{c^2 D_s} \Sigma(\vec{x}) = 2 \frac{\Sigma(\vec{x})}{\Sigma_{cr}} = 2\kappa(\vec{x}) \quad (38)$$

また、式 (29) と式 (32) から、レンズポテンシャルは、

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \iint d^2 \vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| \quad (39)$$

となる．各自、これを式 (32) に代入して、式 (29) が成り立つかチェックするとよい．

この節のまとめ：

レンズポテンシャル：曲がりの角度のポテンシャル<sup>1</sup>

$$\psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \iint d^2 \vec{\theta}' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$$

#### 1.2.4 Source と Image の対応関係

source がレンズポテンシャルの変化のスケールの変化よりずっと小さいならば、レンズ方程式 (31) は

$$\begin{aligned} \vec{\beta}(\vec{\theta}) &= \vec{\beta}(\vec{\theta}_0) + \left( \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \right)_{\vec{\theta}_0} \cdot (\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \\ &= \vec{\beta}(\vec{\theta}_0) + A(\vec{\theta}_0)(\vec{\theta} - \vec{\theta}_0) \end{aligned} \quad (40)$$

<sup>1</sup>ニュートン力学において、力とポテンシャルの対応関係と同じ．

のように基準の光線  $\vec{\theta}_0$  について展開することができる．ここで出てくる  $A$  はヤコビ行列とよばれ、次で定義される：

$$A(\vec{\theta}) = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \psi(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \quad (41)$$

source の基準の位置を  $\vec{\beta}(\vec{\theta}_0)$  にとり、その基準点からの source の位置ベクトルを  $\delta \vec{\beta}$ 、Image の基準点を  $\vec{\theta}_0$  にとり、その基準点からの Image の位置ベクトルを  $\delta \vec{\theta}$  とすると、式 (40) から、

$$\delta \vec{\beta} = A(\vec{\theta}_0) \delta \vec{\theta} \quad (42)$$

と関係付けられる．これより、ヤコビ行列は Image の形を Source の形に変換する行列であることが分かる．

仮想的に像 (Image) が現れる 2 次元面をイメージ面またはレンズ面と呼ぶと、曲がりの角度を Image の角度  $\vec{\theta}$  の関数として表すことで、レンズ方程式はイメージ面から光源面への写像を与える．この写像の局所的性質が式 (42) である．

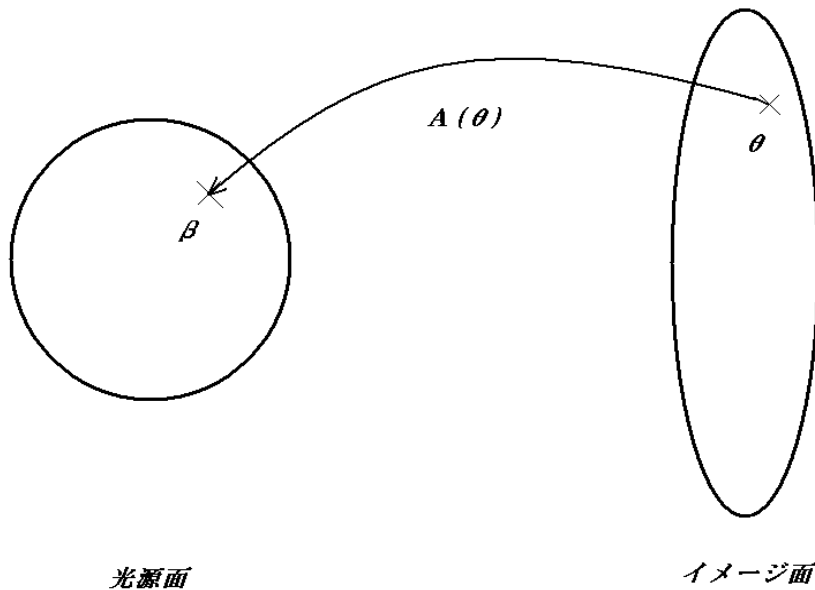


図 3: ヤコビ行列  $A$  が Image から Source に写像する様子．

微分の表記を、

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \psi_{,ij} \quad (43)$$

とすれば、ヤコビ行列  $A(\vec{\theta})$  は、

$$A(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \psi_{,11} & -\psi_{,12} \\ -\psi_{,12} & 1 - \psi_{,22} \end{pmatrix} \quad (44)$$

と書ける．ここで、

$$\gamma_1 \equiv |\gamma| \cos(2\phi) = \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}) \quad (45)$$

$$\gamma_2 \equiv |\gamma| \sin(2\phi) = \frac{1}{2}\psi_{,12} \quad (46)$$

$$1 - \psi_{,11} = 1 - \frac{1}{2}(\psi_{,11} + \psi_{,22}) - \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}) = 1 - \kappa - \gamma_1 \quad (47)$$

$$1 - \psi_{,22} = 1 + \frac{1}{2}(\psi_{,11} + \psi_{,22}) - \frac{1}{2}(\psi_{,11} - \psi_{,22}) = 1 - \kappa - \gamma_2 \quad (48)$$

であることを使えば、式 (44) は、

$$A(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

となる．ただし、 $\phi$  は (1.2.5) で明らかになる． $\gamma$  はシエア (shear) と呼ばれる量である．この式から、観測されたイメージの形状、すなわち、大きさや歪みの情報は、コンバージェンス  $\kappa$  やシエア  $\gamma$  で書けることが分かる．

この節のまとめ：

ヤコビ行列  $A(\vec{\theta})$  は Source と Image の対応関係を与えるものであり、互いの位置関係や形状の変化などを考えるうえで大変重要なものである． $A(\vec{\theta})$  は、 $\kappa, \gamma$  を用いて次のように書ける．

$$A(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix}$$

### 1.2.5 コンバージェンス、シエアの物理的意味

ここでは、コンバージェンス  $\kappa$  やシエア  $\gamma$  の意味を考える．その前に少々下準備が必要である．まず、前節で出てきたシエア  $\gamma_1, \gamma_2$  は次で定義された：

$$\gamma_1 = |\gamma| \cos(2\phi)$$

$$\gamma_2 = |\gamma| \sin(2\phi)$$

ここで、 $\phi$  は図の左で示されるような、 $\theta_1$  軸から測った銀河の長軸の角度である．このままでもよいが、新しい  $\theta_1$  として銀河の長軸を選んだ方がシンプルである．この軸を改めて  $\theta'_1$  軸とする．これは、次のような座標変換を行ったことを意味する．

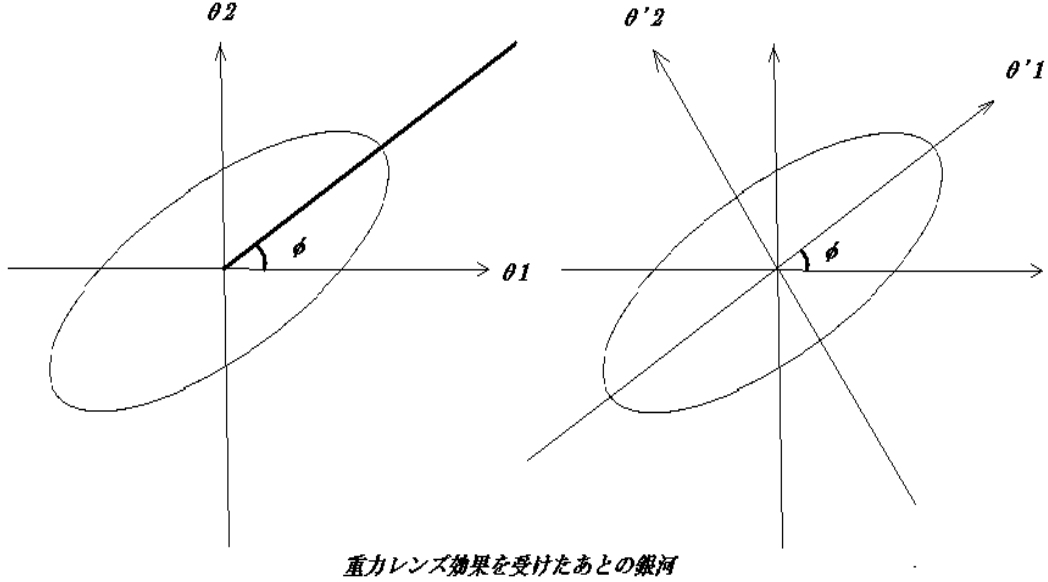


図 4: 重力レンズ効果を受けた後の銀河と座標のとり方

$$(\theta_1, \theta_2) \longrightarrow (\theta'_1, \theta'_2)$$

この変換を式で表すと、

$$\begin{pmatrix} \theta'_1 \\ \theta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \theta'_1 = (\cos \phi)\theta_1 + (\sin \phi)\theta_2 \\ \theta'_2 = (-\sin \phi)\theta_1 + (\cos \phi)\theta_2 \end{cases} \quad (51)$$

この座標変換にともなって、ヤコビ行列も変換される。

$$A'_{\mu\nu}(\vec{\theta}') = \frac{\partial \theta'_\mu}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial \theta'_\nu}{\partial \theta_\beta} A_{\alpha\beta}(\vec{\theta}) \quad (52)$$

ここで、 $\mu, \nu, \alpha, \beta = 1, 2$  であり、 $\alpha, \beta$  について縮約がきいている。たとえば、 $\mu = \nu = 1$  のとき、

$$\begin{aligned} A'_{11}(\vec{\theta}') &= \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_\beta} A_{\alpha\beta}(\vec{\theta}) \\ &= \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_\alpha} \left( \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} A_{\alpha 1} + \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} A_{\alpha 2} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} \right)^2 A_{11} + \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} A_{21} + \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} A_{12} + \left( \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} \right)^2 A_{22} \quad (53) \end{aligned}$$

ここで、式 (51) より、

$$\frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} = \cos \phi, \quad \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_1} \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} = \sin \phi \cos \phi, \quad \frac{\partial \theta'_1}{\partial \theta_2} = \sin \phi \quad (54)$$

だから、式 (52) は、

$$A'_{11} = 1 - \kappa - \gamma \quad (55)$$

となる．同様に、 $A'_{12}, A'_{21}, A'_{22}$  を計算すると、変換されたヤコビ行列  $A'(\vec{\theta}')$  は、

$$A'(\vec{\theta}') = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \quad (56)$$

とかける．式 (42) より、

$$\begin{pmatrix} \delta \beta'_1 \\ \delta \beta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \kappa + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \theta'_1 \\ \delta \theta'_2 \end{pmatrix} \quad (57)$$

となる．ヤコビ行列  $A'(\vec{\theta}')$  の逆行列  $(A'(\vec{\theta}'))^{-1}$  は、

$$(A'(\vec{\theta}'))^{-1} = \begin{pmatrix} 1/(1 - \kappa - \gamma) & 0 \\ 0 & 1/(1 - \kappa + \gamma) \end{pmatrix} \quad (58)$$

だから、

$$\begin{pmatrix} \delta \theta'_1 \\ \delta \theta'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/(1 - \kappa - \gamma) & 0 \\ 0 & 1/(1 - \kappa + \gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \beta'_1 \\ \delta \beta'_2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

となる．たとえば、Source の形が単位円のものは、レンズ効果によって次の図のような変形を受けることになる．

式や図から明らかだが、レンズ効果を受けた銀河の外縁部は、 $\theta'_1, \theta'_2$  軸と  $(1/(1 - \kappa - \gamma), 0), (0, 1/(1 - \kappa + \gamma))$  で交わっている．これでようやく下準備が終わったので、 $\kappa$  と  $\gamma$  の物理的意味について考えることができる．まず、 $\kappa$  の影響を除くため、 $\kappa = 0$  と固定し、 $\gamma$  の値を変えてみよう．そうすると、それぞれの軸の交点の値は  $\gamma = 0$  のときを除き、同じ値にはならない．しかも、 $\gamma$  の値を大きくすればするほど、両者の値に差ができる．すなわち歪みが大きくなる．逆に、 $\gamma$  の影響を除くため、 $\gamma = 0$  と固定し、 $\kappa$  の値を変えてみよう．そうすると、それぞれの軸の交点の値は同じ値をとる一方、レンズ効果を受けた銀河は大きくなったり小さくなったりするように見える．

この節のまとめ：

---

コンバージェンス  $\kappa$  とシエア  $\gamma$  の物理的意味

$\kappa$  : 面積を変える効果

$\gamma$  : 歪みを与える効果

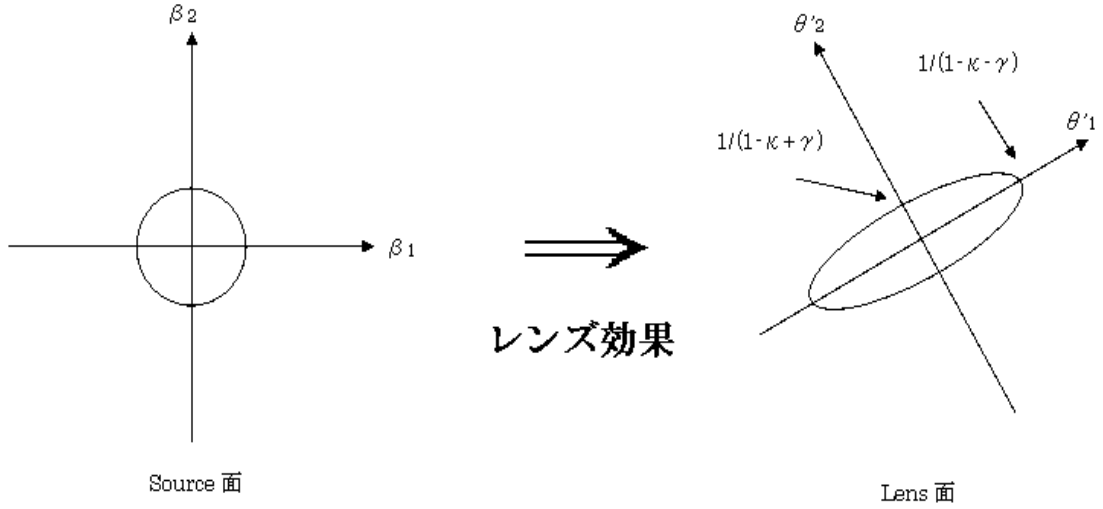


図 5: Source の歪みと座標のとり方

### 1.2.6 増光率

これまで、Source がレンズ効果によってどのような変形を受けるかについて考えてきた。今度は、レンズ効果による増光率について考えよう。増光率  $\mu(\vec{\theta})$  は、Source の面積に対する Image の面積の比であると定義すると、

$$\mu(\vec{\theta}) = \left| \det \begin{pmatrix} \delta\vec{\theta} \\ \delta\vec{\beta} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{|\det(\delta\vec{\beta}/\delta\vec{\theta})|} = \frac{1}{|\det A(\vec{\theta})|} \quad (60)$$

これに、

$$\det A(\vec{\theta}) = (1 - \kappa + \gamma)(1 - \kappa - \gamma) \quad (61)$$

を代入すると、増光率  $\mu(\vec{\theta})$  は、

$$\mu(\vec{\theta}) = \frac{1}{|(1 - \kappa + \gamma)(1 - \kappa - \gamma)|} \quad (62)$$

とかける。

非常に簡単に説明してしまったが、ここで大切な事実を用いている。節の冒頭によれば、増光率  $\mu$  を、Source の面積に対する Image の面積の比である、と定義し

ている．たとえば、もともとの銀河の面積が1で、レンズ効果を受けたその面積が2であれば増光率は $2 \div 1 = 2$ となる．これでいいではないか、と思うかもしれない．しかし、レンズ効果を受けたもの (Image) と受けていないもの (Source) の表面輝度 (単位時間、単位面積、単位振動数、単位立体角あたりに観測するエネルギー) が両者で一致していなければ、増光率の定義はあまり意味がないものになってしまう．

しかし、重力レンズ現象においては表面輝度は変化しない．この大切な事実を用いて、増光率の定義をおこなった．

この事実を証明してみよう．

証明 ある時間  $dt$  の間に流れる光の単位面積、単位振動数、単位立体角のエネルギーは、 $Icdt$  であるから、ある面積  $ds$  を通ってある立体角  $d\Omega$  から出てくる振動数  $d\nu$  の範囲のエネルギー  $dE$  は、表面輝度を  $I$  とすれば、

$$dE = Icdt ds d\nu d\Omega \quad (63)$$

と書ける．一方、このエネルギーは光子の分布関数 (位置、運動量の6次元位相空間で定義された)  $f$  を使って、

$$dE = h\nu f d^3x d^3p \quad (64)$$

とあらわせる．一般に分布関数  $f$  は位置  $\vec{x}$ 、運動量  $\vec{p}$  の関数であり、単位体積、単位運動量体積あたりの光子の個数密度である．上の2式より、

$$\begin{aligned} Icdt ds d\nu d\Omega &= h\nu f d^3x d^3p \\ &= h\nu f \cdot c dt d\Omega \cdot 4\pi p^2 dp \\ &= h\nu f \cdot c dt d\Omega \cdot 4\pi h^3 \nu^2 d\nu \\ &= 4\pi h^3 \nu^3 f c dt ds d\nu d\Omega \\ I &\propto \nu^3 f \end{aligned} \quad (65)$$

と、表面輝度  $I$  は  $\nu^3 f$  に比例することがわかる．さらに、リウビル (Liouville) の定理の帰結、すなわち、位相空間<sup>2</sup>の体積が保存すること、重力レンズ現象ではエネルギーのやりとりがなく光子数が保存することを用いれば、 $f, \nu$  は一定である．したがって表面輝度  $I$  も一定であることがわかる． ■

この節のまとめ： \_\_\_\_\_  
重力レンズ現象では、レンズ効果を受ける前と後において、表面輝度は保存され

<sup>2</sup>位相空間とは、粒子の位置と運動量の各々の  $x, y, z$  成分を直行座標とする空間のことである．たとえば、座標軸は  $(x, y, z, p_x, p_y, p_z)$  の6次元である．



る。  
増光率：

$$\mu(\vec{\theta}) = \frac{1}{|(1 - \kappa + \gamma)(1 - \kappa - \gamma)|}$$


---

### 1.2.7 critical curve (臨界曲線) と caustics (コースティックス)

式 (60) と (62) を見ればわかるように、

$$\det A(\vec{\theta}) = 0 \quad (66)$$

または、

$$(1 - \kappa + \gamma)(1 - \kappa - \gamma) = 0 \quad (67)$$

を満たすところでは、増光率  $\mu(\vec{\theta})$  は無限大になる。このような場所を線で結んでいくと閉曲線になるが、イメージ面上での曲線を critical curve (臨界曲線)、それに対応する光源面での曲線を caustics (コースティックス) とよぶ。すなわち、caustics に光源があると、(点光源の場合は) 無限に増光されたイメージがあらわれる。

しかし、銀河などの実際の天体は有限の大きさを持ち、天体全部の領域で厳密に  $\det A = 0$  がなりたつことはなく、無限に明るくはならない。しかし critical curve の近くに見えている天体は、レンズ効果を受ける前と比べて非常に明るくなっている。そのような天体は giant arc と呼ばれる。

式 (67) を満たす  $\kappa$  を  $\kappa_+, \kappa_-$  とすると、

$$\kappa_+ = 1 + \gamma \quad (68)$$

$$\kappa_- = 1 - \gamma \quad (69)$$

とであるが、 $\kappa$  の値は銀河中心から外側に行くほど小さくなるので  $\kappa_+ = 1 + \gamma$  を満たす曲線は  $\kappa_- = 1 - \gamma$  を満たす曲線よりも内側にくる。内側にくる曲線を inner critical curve、外側にくる曲線を outer critical curve とよぶ。inner critical curve は、Source を動径方向に引き伸ばし、outer critical curve は接線方向に引き伸ばす。このことは、図 (5) を見れば明らかだろう。

### 1.2.8 アインシュタインリング

レンズ天体の質量分布が球対称である場合、光源、レンズ、観測者が一直線に並んだとき、レンズを中心とするある半径の円状の像ができる。これをアインシュ

タイムリングという．以下、アインシュタインリングの半径はどのくらいの大きさになるかを考える．

レンズ方程式

$$\beta = \theta - \frac{D_{ds}}{D_d D_s} \frac{4GM(\theta)}{c^2 \theta} \quad (70)$$

に対して、 $\beta = 0$  を課し、 $\theta$  について解くと、

$$\theta_E = \frac{1}{D_d} \sqrt{\frac{M(\theta_E)}{\pi \Sigma_{cr}}} \quad (71)$$

とアインシュタイン半径  $\theta_E$  が求まる．このアインシュタイン半径にはおもしろい性質がある．アインシュタイン半径内で、面密度を平均すると、

$$\langle \Sigma(\theta_E) \rangle = \frac{1}{\pi \theta_E^2} \int_0^{\theta_E} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \Sigma(\theta) = \Sigma_{cr} \quad (72)$$

と臨界面密度が得られる．この性質は銀河団の質量評価に用いられる．銀河団による重力レンズ効果により Source がアーク状に引き伸ばされることがあるが、このアーク像がアインシュタイン角度に現れるとすると、アークが観測される角度以内に含まれる質量は次のように評価される．

$$M(\theta_{arc}) = \Sigma_{cr} \pi (D_d \theta)^2 \approx 1.1 \times 10^{15} M_{\odot} \left( \frac{\theta_{arc}}{30''} \right)^2 \left( \frac{D}{1 \text{Gpc}} \right) \quad (73)$$