解析力学中間試験講評

TA：望月　悠紀*

2010/7/2

1　問題１

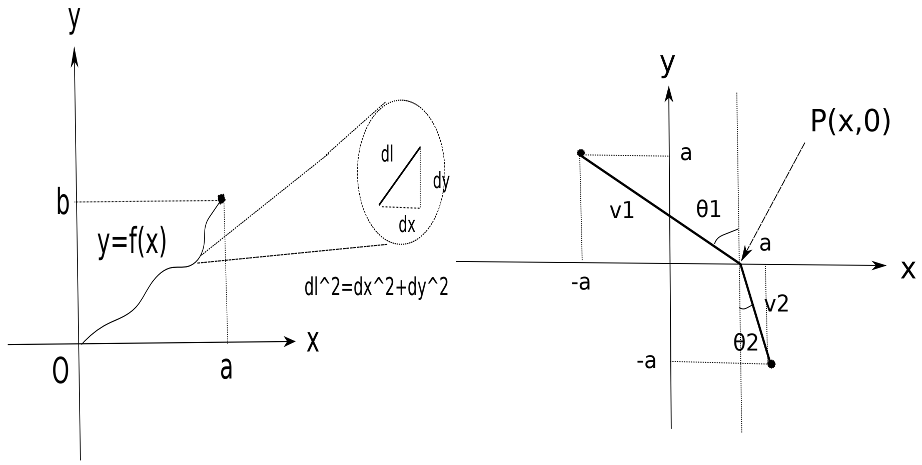

図 1: 問題１

1.1　小問 (1) 正答率：３９％

解答：
微小な線の長さを dl とすると、

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

であるから、求める曲線の長さは I は、

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

*東北大学理学研究科天文学専攻　E-mail: mochi@astr.tohoku.ac.jp　Web: http://mochi.ikidane.com/index.html

と求まる。

基本的な問題なので、間違えないようにしてほしいですね。うっかり、積分区間が抜けている答案などが目立ちました。不定積分だと長さ I は定まらず、だめ。

1.2　小問 (2) 正答率：１９％

解答：

汎関数 I **を、**

$$I[f_m] \equiv \int_a^b F(x, y, y')dx \tag{3}$$

で定義する。ただし、$y' = df(x)/dx$ **である。また、変分** δI **を、**

$$\delta I \equiv I[f] - I[f_m] \tag{4}$$

で定義する。これを計算すると、

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_0^a F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - \int_0^a F(x, y, y')dx \\ &= \int_0^a \left\{ F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x, y, y') \right\} dx \end{aligned} \tag{5}$$

となるが、Taylor 展開

$$\begin{aligned} f(x+\delta x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(\delta x)^n \\ &= f(x) + f'(x)\delta x + \frac{1}{2} f''(x)(\delta x)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

を用い、２次より高次の項を無視すると、

$$F(x, y+\delta y, y'+\delta y') = F(x, y, y') + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}\delta y' + O((\delta y)^2, (\delta y')^2) \tag{7}$$

であるから、これを式 (5) に代入すると、

$$\delta I = \int_0^a \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \right\} dx \tag{8}$$

となる。変分原理によれば、これが 0 **になればよい。また、式 (2) と式 (3) を見比べると、**

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2} = \sqrt{1 + y'^2} \tag{9}$$

となり、これを式 (5) に代入してやれば、

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_0^a \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y' dx \\ &= \int_0^a \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\left(\frac{d}{dx}\delta y\right)dx \\ &= -\int_0^a \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y dx = 0\end{aligned}$$

δy **は任意であるから、**$y''=0$ **となり、**$y=\alpha x+\beta$ **とかける。この直線は点 O、P を通ることから、**

$$y = \frac{b}{a}x \tag{10}$$

で表される直線であることが分かる。

上の解答では変分原理 $\delta I = 0$ から直接導いていますが、変分原理から導出されるオイラー方程式

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{11}$$

から出発しても OK。教科書の例題になっている問題なので確実にといてほしいところですが、ヤマが外れたのか（？）あまり出来はよくなかった。変分原理はおもしろい原理で相対性理論にも出てくるので、理解しましょう。
一番目立ったミスは、ほとんど解けているにも関わらず、

$$y = Cx + D$$

のように定数 C, D を定めていない、というもの。この直線は、原点と点 (a,b) を通るという条件を忘れないようにしましょう。

次に多かった間違いは、オイラー方程式を上手に使えていない、というもの。具体的には、式 (11) で、F が I になっていたり、d/dx が d/dt になってオカシクなってしまっていました。公式を覚えるのは大切ですが、どんな関数を、何で微分するのか、といったことまで理解すれば完璧です。

1.3 小問 (3) 正答率；１２％

解答:

点 A$(-a,a)$ **から点 B**$(a,-a)$ **まで移動するのにかかる時間** t **は、点 P の** x **座標を** x **とすると、**

$$t = \frac{\sqrt{(x+a)^2+a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x-a)^2+a^2}}{v_2} \tag{12}$$

であり、この t が最小になるためには、

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+a^2}} = 0 \tag{13}$$

解説：この問題を小問 (1)(2) と同じやり方だと思ってオイラー方程式をたてたり、変分を考えたりした解答が多かった。逆にややこしくなり、ほとんど正解にはなりません。また、所用時間 t を x で微分しようとした人も半数近くはいました。だがしかし !! なんと !! **微分ができない !!** 微分の計算ぐらいはちゃんとやって。。。
また、相加平均・相乗平均の関係を用いて計算している人がいたが、関数同士の相加平均・相乗平均の関係は、やらない方がいいでしょう。

1.4　小問 (4) 正答率：７％

解答:

$$\sin\theta_1 = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+a^2}} \tag{14}$$

であるから、小問 (3) の条件と合わせると、次の関係が求まる。

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{15}$$

解説：屈折の法則を導く問題で、実におもしろい。ですが、最後まで答えにたどりついた解答はほとんどなかったです。おそらく、何人かの人は「あ、屈折の法則だ !! 」と感じ取ったと思います。が、いきなり、「屈折の法則より、$\sin\theta_1/\sin\theta_2 = v_1/v_2$」などと書いている解答は一切合切×にしました。勘はいいだけに、少し後ろめたい気持ちはあるにはありますが、そうしました。また、残念だったのが、

$$\sin\theta_1 = \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+a^2}} \tag{16}$$

を書けなかった解答が多数 !! 三角関数どころか、三角比ができないのはマズイですよ…。研究室で涙がでましたので、うっかりミスにはくれぐれも気をつけてください。

2　問題２

この問題では、回転する円環の縁を質点がどのように運動するかを調べる問題である。ラグランジュ関数とラグランジュ方程式、そして方程式の解を基に、質点の運動を物理的に解釈するのが目的である。

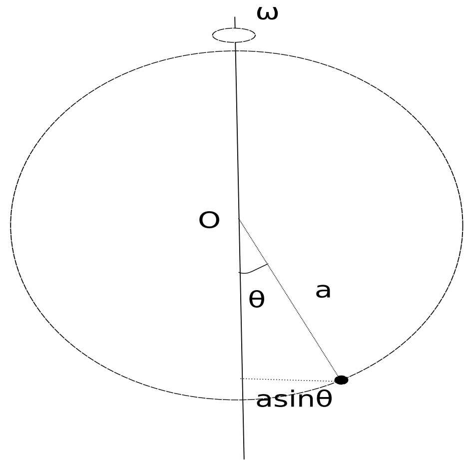

図 2: 問題 2

2.1 小問 (1) 正答率 55 %

解答例：
運動エネルギー、位置エネルギー、ラグランジュ関数をそれぞれ T, U, L **とすると、**

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta \tag{17}$$

$$U = -mga\cos\theta \tag{18}$$

であり、したがって、ラグランジュ関数は、

$$L = T - U = \frac{1}{2}ma^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + mga\cos\theta \tag{19}$$

となる。ただし、位置エネルギーの基準を円環の中心の高さとした。

解説
運動エネルギー位置エネルギーを正しく書け、ラグランジュ関数を正しく表現できるかを問う問題。
半数以上の解答はできていましたが、運動エネルギーや位置エネルギーを正しく書けず、ラグランジュ関数を間違って答える答案がありました。運動エネルギーを T とすると、

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta \tag{20}$$

であるが、回転の運動エネルギーのみしか考えていない

$$T = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta$$

や、円環の接線方向の運動エネルギーしか考えていない

$$T = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$$

などがありました。

また位置エネルギー U については、円環の中心の高さをその基準 ($U = 0$) とすると、

$$U = -mga\cos\theta$$

と正しくかけています。しかし、a **を書き忘れたり、符号が逆になっている解答も見られた。**なお、円環の最下部を位置エネルギーの基準とした

$$U = mga(1 - \cos\theta) \tag{21}$$

なども正解。

この場合のラグランジュ関数 L は、

$$L = T - U = \frac{1}{2}ma^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - mga(1 - \cos\theta) \tag{22}$$

となり、これも丸。

2.2　小問 (2) 正答率 41 %

解答：

ラグランジュの方程式は、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0 \tag{23}$$

である。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = ma^2\ddot{\theta} \tag{24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta - mag\sin\theta \tag{25}$$

であるから、ラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\omega^2\cos\theta - \frac{g}{a}\right) = 0 \tag{26}$$

とかける。

ラグランジュの方程式を用いて、本問における質点の運動方程式を導く問題。
ラグランジュ方程式 (23) は覚えてくれていますが、**微分の間違いが多く、正解にたどり着けない解答が…。期末試験で同じ間違いをしないようにしてくださいね。**

2.3　小問 (3) 正答率 0 %

解答：
リング上で静止するためには $\ddot{\theta} = 0$ **が必要条件。式 (26) にこの条件を課すと、**

$$\sin\theta \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{a} \right) = 0 \tag{27}$$

という質点がリング上で静止する条件式が得られる。これは、

$$\sin\theta = 0, \qquad \text{または、} \qquad \omega^2 \cos\theta = \frac{g}{a} \tag{28}$$

と同値である。

1. $\sin\theta = 0$ **のときは、**$\theta = 0$ **が、**ω **の値によらず平衡点となる。なお、**$\theta = \pi$ **は不安定なので、平衡点ではない。**

2. $\omega^2 \cos\theta = g/a$ **のとき、**$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ **より、**$\omega > \sqrt{g/a}$ **であり、この条件を満たすときのみ**

   $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{a\omega^2} \right) \tag{29}$$

   という解、すなわち平衡点をもつ。さらに、

   - $\omega \to \infty$ **のとき、**$\cos\theta \to 0$ **だから** $\theta \to \frac{\pi}{2}$
   - $\omega \to \sqrt{g/a}$ **のとき、**$\cos\theta \to 1$ **だから** $\theta \to 0$

   である。

以上より、質点の平衡点の位置は、
$0 \leqq \omega \leqq \sqrt{g/a}$ **のとき、**$\theta = 0$**、**$\sqrt{g/a} < \omega$ **のとき、**$\theta = 0, \cos^{-1}(g/a\omega^2)$**。**

　小問 (2) で導いた方程式を解き、解をもとに、質点の運動を解釈する問題
リングが静止する条件は、小問 (2) より

$$\sin\theta \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{a} \right) = 0 \tag{30}$$

なのですが、なぜか、

$$\sin\theta \neq 0$$

だと思って、上の条件を

$$\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{a} = 0$$

と書いてしまっている人がいました。$\sin\theta = 0$ の場合も解であることを見抜こう。また、$\sin\theta = 0$ が解であるからといって、平衡点は $\theta = 0,\ \pi$ ではなく、$\theta = 0$ のみであることに注意すること。$\theta = \pi$ は質点は安定に留まることができず、平衡点とは言わないんですよ。

　また、

$$\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{a} = 0$$

の解 θ を求める際、角振動数 ω の値に制限がつくことを忘れている方がおられました。$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ なのだから、角振動数 ω には、

$$\omega \geqq \sqrt{\frac{g}{a}}$$

という制限がついたときに初めて

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{a\omega^2}\right)$$

という解が得られます。それでは、

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$$

のときにはどうなるのでしょう。答えは、それを満たすような θ は存在しないから、解がない、という結論になります。ただし、$\sin\theta = 0$ という解は ω の値によらないから、式 (30) より、$\theta = 0$ を得るのです。

2.4　小問 (4) 正答率０％

解答：

$|\theta| << 1$ **であると仮定すると、次の近似式が成り立つ。**

$$\sin\theta \approx \theta$$
$$\cos\theta \approx 1$$

すると、小問（２）で求めたラグランジュの運動方程式は、

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\theta \tag{31}$$

となる。

1. $g/a - \omega^2 > 0$ **のとき**

$$\theta(t) = A\sin\left[\sqrt{\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)}t + \alpha\right] \tag{32}$$

と解けるので、質点は角速度 $\Omega = \sqrt{g/a - \omega^2}$**、周期** $T = 2\pi/\sqrt{g/a - \omega^2}$ **の単振動をする。**

2. $g/a - \omega^2 < 0$ **のとき**

$$\theta = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t} \qquad \lambda \equiv \sqrt{\omega^2 - \frac{g}{a}} \tag{33}$$

とかけるので、θ は時間 t に対して指数関数的に増大する。

解説：小問 (2) で導出したオイラーの運動方程式を解けばよいのですが…ほぼ全滅でした。。。１年生のときにやっているはず！微分方程式を解く、ということは今後もたくさんでてきますので、必ず、目をつぶっても解けるぐらいに練習を積んでください。ちなみに、ワタクシは宇宙の大規模構造の研究をするため、微分方程式を解くことに悪戦苦闘の日々です…。とほほ。。。

3　TA からのコメント・アドバイス

これまでを振り返ると、正答率はそんなに高くはないのが分かるでしょう。しかし、完全に×になっている解答もあまりなく、全体の点数として見ると、悪くはないでしょう。ただし、逆にいうと、「うっかりミス」が多かったとも言えます。ていうか、多すぎます！具体的には、微分の間違いが圧倒的に多く、次に積分の始点と終点の書き忘れ、三角比が正しく書けないなど。

とにかく、計算は丁寧に！確実に !!

あとは、教科書の問題や章末問題をしっかりやりましょう。気をつけたいことは、

何度も解いて、答えを覚えてしまうぐらいに繰り返すこと。

です。解答を見て理解するだけでは、問題を解くことはできませんからね。また、ワタクシのように部活などで時間がない人は、分からないところは先生や友人に質問をしていくなどしてカバーしてくださいね。

期末試験、がんばりましょう！

何か、質問や相談などありましたら、いつでも物理 A 棟の８１３号室にいらしてくれてもいいですよ★ただし、いきなりいらっしゃっても、心の準備ができていない可能性がありますので、まずはメールにて、お気軽に♪

TA: 望月　悠紀

青葉山キャンパス　物理 A 棟　８Ｆ　８１３号室

E-mail: mochi@astr.tohoku.ac.jp

野口先生の Office Hour:毎週月曜日（７月１２日を除く）15 時から 17 時★