Euler method

1 微分と差分

ある函数を微分した場合の $x = a$ に於ける微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

となる。この際極限操作が行われるので、計算機ではこの演算をすることができない。その為、h を小さくはしてゆくものの有限の値に留めることによって、微分係数の近似値を算出する。この様な近似を差分近似と言いい、差分近似の取り方は主に 3 つある。

1. 前進差分商

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h}\left[y(x_i + h) - y(x_i)\right] \tag{2}$$

2. 後退差分商

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h}\left[y(x_i) - y(x_i - h)\right] \tag{3}$$

3. 中央差分商

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h}\left[y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) - y\left(x_i - \frac{h}{2}\right)\right] \tag{4}$$

これらの式の右辺を差分商と言う。

2 Euler method

Euler 法や Runge-Kutta 法で微分方程式を解くにはこの差分商を使うが差分商を使った微分方程式を差分方程式と言う。ここでは 1 階常微分方程式を解いてゆく。まず 1 階常微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathcal{F}(x, y) \tag{5}$$

と書くことができる。これの $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ にそれぞれの差分商を代入してゆくことになる。

前進差分商を代入すると、

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{h}\left[y(x_i + h) - y(x_i)\right] = \mathcal{F}(x, y) \quad \leftrightarrow \quad y(x_i + h) = y(x_i) + \mathcal{F}\left(x_i, y(x_i)\right) \cdot h \tag{6}$$

となり、後退差分商の場合は

$$\frac{1}{h}\left[y(x_i)-y(x_i-h)\right]=\mathcal{F}(x,y) \quad \leftrightarrow \quad y(x_i-h)=y(x_i)-\mathcal{F}\left(x_i,y(x_i)\right)\cdot h \tag{7}$$

となる。

ただし、中央差分商の場合は

$$\frac{1}{h}\left[y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-y\left(x_i-\frac{h}{2}\right)\right]=\mathcal{F}(x,y) \quad \leftrightarrow \quad y\left(x_i+\frac{h}{2}\right)=y\left(x_i-\frac{h}{2}\right)-\mathcal{F}\left(x_i,y(x_i)\right)\cdot h \tag{8}$$

と、$y(x_i)$ 意外の値も既知でなければならない為 Euler method には使用できない。

この差分商と以下の式

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0)+\frac{\delta y}{\delta x}h = y(x_0)+\mathcal{F}(x_0,y(x_0))h \\ y(x_2) &= y(x_1)+\mathcal{F}(x_1,y(x_1))h \\ &\vdots \\ y(x_{i+1}) &= y(x_i)+\mathcal{F}(x_i,y(x_i))h \end{aligned} \tag{9}$$

を使って $y(x_1),y(x_2),y(x_3),\cdots$ と順々に $y(x_i)$ の値を求めてゆく方法を Euler method と言う。なお、$x_i := x_0+i\cdot h\ (i=1,2,\cdots)$ である。

この差分商と解析的な手法によって求めた値とのずれの大きさは次のようになる。$(0<\theta<1)$

1. 前進差分商の場合

$$\mathcal{F}(x_0)-f'(x_0)=\frac{f''(x_0+\theta h)}{2}(1-\theta)h \qquad (0<\theta<1) \tag{10}$$

2. 後退差分商の場合

$$\mathcal{F}(x_0)-f'(x_0)=-\frac{f''(x_0-\theta h)}{2}(1-\theta)h \tag{11}$$

3. 中央差分商の場合

$$\mathcal{F}(x_0)-f'(x_0)=\frac{(1-\theta)^2}{48}h^2\left[f^{(3)}\left(x_0+\frac{\theta h}{2}\right)+f^{(3)}\left(x_0-\frac{\theta h}{2}\right)\right] \tag{12}$$

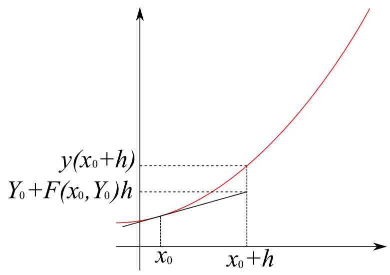

図 1　Euler method で求めた値と真の値の関係。この図と、式から幅の値 h を狭めていけばそれなりの精度が出ることが伺えるが、計算時間も遅くなるうえに、計算機が有する有効桁数の問題もあるので限界がある。